

# Dynamika



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

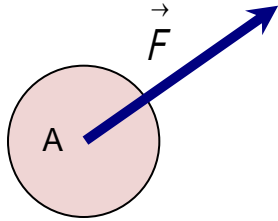
**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



# Siła. Zasady dynamiki

**Siła** jest wielkością wektorową. Posiada określoną wartość, kierunek i zwrot. Jednostką siły jest niuton (N).

$$1\text{N} = 1 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$



Siła  $\vec{F}$  przyłożona jest do ciała w punkcie A, jej kierunek oraz zwrot wskazuje strzałka, której długość jest proporcjonalna do jej wartości.

Przedstawienie matematyczne

W trójwymiarowym układzie współrzędnych prostokątnych siłę określają współrzędne  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

## Siły powodują ruch ciał materialnych i zmiany stanu ruchu.

### Pierwsza zasada dynamiki

Jeżeli na ciało nie są wywierane siły (albo działające siły równoważą się) to ciało to pozostaje w spoczynku lub w ruchu jednostajnym, prostoliniowym.

Układy, w których pierwsza zasada dynamiki nie jest spełniona, nazywamy układami nieinercyjnymi; układy, w których jest spełniona - układami inercyjnymi.

### Druga zasada dynamiki

Siła  $\vec{F}$  działająca na ciało o masie  $m$  nadaje tej masie przyspieszenie  $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Iloczyn masy ciała przez jego przyspieszenie równy jest sile działającej na to ciało.

gdzie:  $m$  to masa bezwładna

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

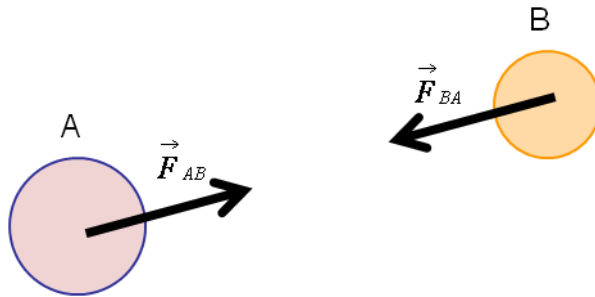
\*Szybkość zmiany pędu ciała równa jest wypadkowej sile działającej na to ciało.

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

# Siły. Zasady dynamiki

## Trzecia zasada dynamiki

Oddziaływania wzajemne dwóch ciał są zawsze równe co do wartości ale przeciwnie skierowane.

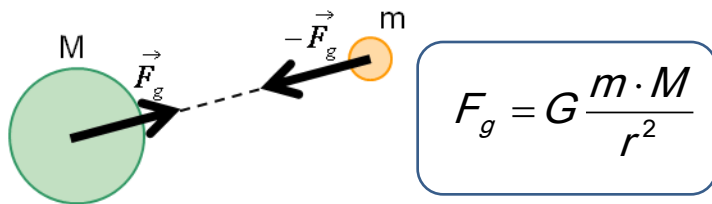


$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Kiedy ciało A działa na ciało B siłą  $\vec{F}_{AB}$  to ciało B oddziałuje na ciało A siłą  $\vec{F}_{BA}$ .

## Siła grawitacji

Siła wzajemnego przyciągania się ciał o masach M i m, które są w odległości r.



$$F_g = G \frac{m \cdot M}{r^2}$$

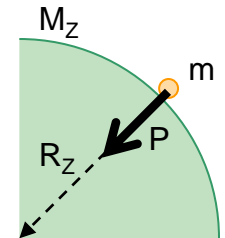
gdzie stała grawitacji  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$

## Siła ciężkości

Siła ciężkości P jest siłą grawitacji, która działa na ciało o masie m znajdujące się przy powierzchni Ziemi.

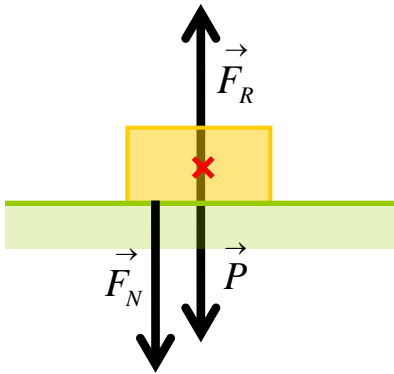
$$P = G \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2} = m \cdot g$$

$$g = G \frac{M_Z}{R_Z^2} = 9,81 \text{ m/s}^2$$



gdzie:  $M_Z$  – masa Ziemi  
 $R_Z$  – promień Ziemi  
g – przyspieszenie ziemskie

## Siły. Zasady dynamiki



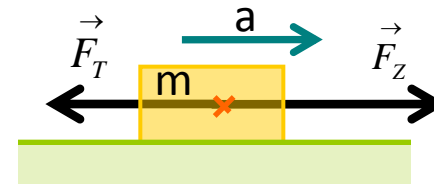
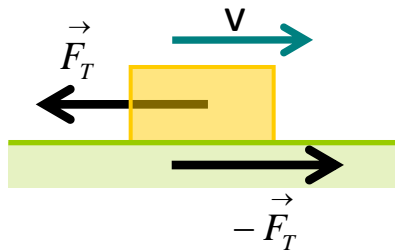
Siły działające na ciało pozostające w spoczynku na podłożu równoważą się

$$P = F_N = F_R$$

$P$  – siła ciężkości (działająca na ciało, pochodząca od Ziemi)

$F_N$  – siła nacisku (działająca na podłoże, pochodząca od ciała)

$F_R$  – siła sprężystości (siła reakcji wynikająca z III zasady dynamiki, pochodząca od podłoża, działająca na ciało)



II zasada dynamiki:

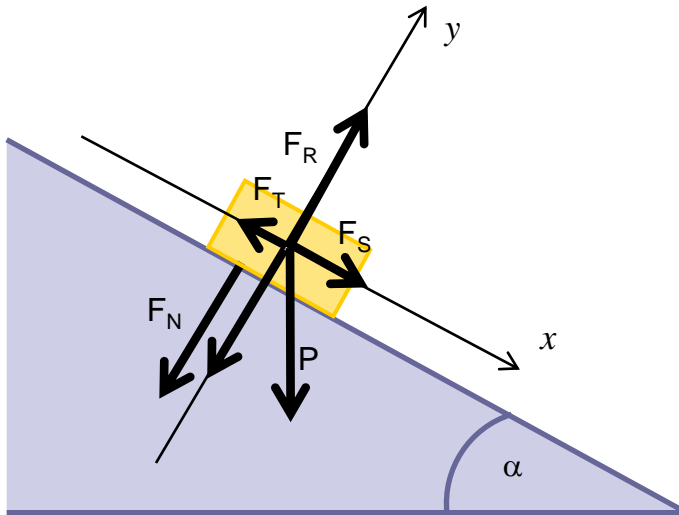
$$F = m \cdot a = F_Z - F_T$$

$F_Z$  – siła zewnętrzna

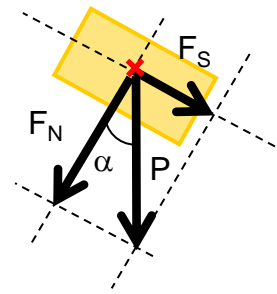
Siła tarcia  $F_T$  działa na przesuwane ciało, a jej zwrot jest przeciwny do kierunku ruchu.

Siła  $-F_T$  działa na podłoże i zgodnie z III zasadą dynamiki jest skierowana przeciwnie do siły  $F_T$  i ma taką samą jak ona wartość

## Równia pochyła



Rozkład siły ciężkości na składowe:



$$P = mg$$

$$F_S = mg \cdot \sin \alpha$$

$$F_N = mg \cdot \cos \alpha$$

Siły leżące na osi OY:

$$F_R - F_N = 0$$

$$F_R = mg \cdot \cos \alpha$$

Siły działające wzdłuż osi OY równoważą się, co oznacza, że ciało przyspieszenie pozostaje zerowe wzdłuż tej osi

Siły leżące na osi OX:

$$F_S - F_T = ma$$

$$mg \cdot \sin \alpha - mgf \cdot \cos \alpha = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) = ma$$

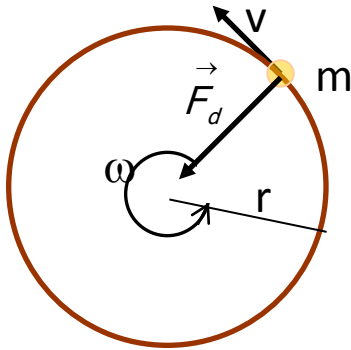
$$a = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Wypadkowa sił działających na ciało wzdłuż osi OX nadaje ciało przyspieszenie  $a$ . Przyspieszenie ma wartość dodatnią, co oznacza, że ciało będzie zsuwać się w dół równi (zgodnie ze zwrotem osi OX)

# Siła dośrodkowa

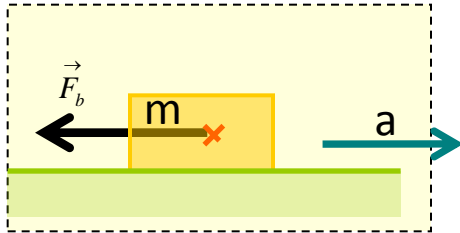
**Siła dośrodkowa** jest to siła powodująca zakrzywienie toru ciała. Siła ta nie zmienia wartości prędkości liniowej ciała, ale zmienia jej kierunek. Kierunek prędkości jest zawsze styczny do toru po jakim porusza się ciało. Siła dośrodkowa działa prostopadłe do wektora prędkości i jest skierowana do środka krzywizny toru.

Siła dośrodkowa w ruchu jednostajnym po okręgu:



$$F_d = m \cdot a_d = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

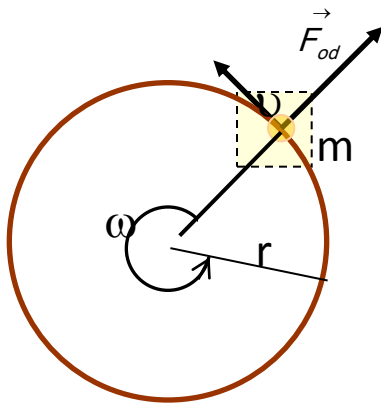
## Siły. Zasady dynamiki



### Siła bezwładności

Siły bezwładności są siłami pozornymi występującymi w układach poruszających się z przyspieszeniem, czyli układach nieinercjalnych. Jeśli przyspieszenie układu wynosi  $a$ , to w układzie pojawi się siła bezwładności:

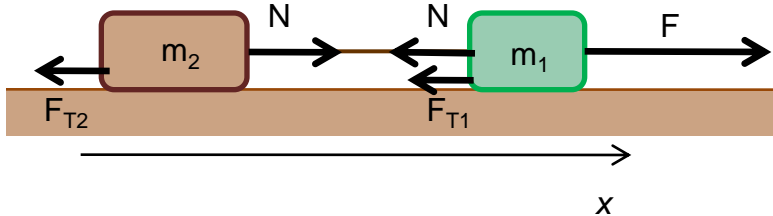
$$\vec{F}_b = -m \cdot \vec{a}$$



Szczególnym przypadkiem układu poruszającego się z przyspieszeniem jest układ poruszający się ruchem jednostajnym po okręgu. Układ taki doświadcza przyspieszenia dośrodkowego. W układzie tym działać będzie siła bezwładności : siła odśrodkowa

### Zadanie 1

Dwa ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączone nieważką oraz nierozciągliwą nicią przesuwają się po poziomej płaszczyźnie pod działaniem przyłożonej siły  $F$ . Współczynnik tarcia między masami  $m_1$ ,  $m_2$  i podłożem wynosi  $f$ . Oblicz przyspieszenie mas  $a$  oraz siłę napinającą nić  $N$ .



### Rozwiązanie

Rozpatrujemy każdą z mas oddzielnie i dla każdego z nich zapisujemy II zasadę dynamiki Newtona. Wprowadzamy jednowymiarowy układ odniesienia: oś  $X$ , której zwrot jest skierowany w prawo. Wypadkowa siła działająca na masę  $m_1$  jest sumą wektorową sił: zewnętrznej siły  $F$ , siły naciągu nici  $N$  oraz siły tarcia  $F_{T1}$ . Wypadkowa siła dla masy  $m_2$  jest sumą wektorową siły naciągu nici  $N$  oraz siły tarcia  $F_{T2}$ .

$$m_1 a = F - N - F_{T1}$$

$$m_2 a = N - F_{T2}$$

Wartości sił tarcia możemy wyrazić jako:  $F_{T1} = f \cdot m_1 g$        $F_{T2} = f \cdot m_2 g$

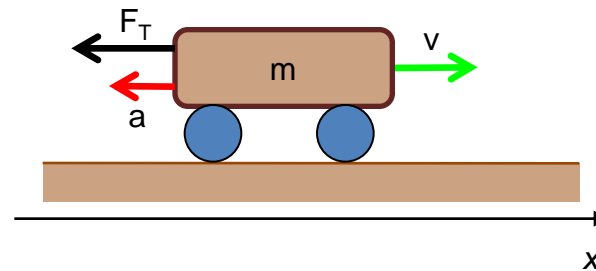
Rozwiązując powyższe równania możemy wyznaczyć przyspieszenie oraz siłę naciągu nici:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - fg \qquad N = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$$



## Zadanie 2

Wprawiony w ruch wózek o masie  $m=20\text{kg}$  toczy się po płaskim podłożu poruszając się ruchem jednostajnie opóźnionym przez  $t=30\text{s}$ . W tym czasie wózek przebył drogę  $s=50\text{m}$ . Jaka była początkowa prędkość  $v_0$  wózka? Jaka była wartość siły tarcia  $F_T$ ? Jaka była wartość współczynnika tarcia  $f$ ?



## Rozwiązanie

Ruch wózka rozpatrujemy w jednowymiarowym układzie odniesienia stosując konwencje zgodnie z którą kierunek „w prawo” będziemy traktować jako „dodatni”.

Od momentu rozpoczęcia ruchu opóźnionego do zatrzymania prędkość wózka zmieniła się o  $\Delta v=0-v_0=-v_0$ . Przyspieszenie jakiego doznał wózek wynosi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-v_0}{t} \quad \text{czyli:} \quad v_0 = -at$$

Droga przebyta przez wózek jest drogą w ruch jednostajnie przyspieszonym (z przyspieszeniem, którego znak w naszym układzie odniesienia będzie ujemny):

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Podstawiając wyrażenie na  $v_0$  do równania na drogę otrzymujemy wyrażenia na przyspieszenie oraz prędkość początkową:

$$a = -\frac{2s}{t^2} \quad \text{oraz} \quad v_0 = \frac{2s}{t}$$

Ponieważ prędkość początkowa  $v_0$  była skierowana w prawo jej wartość jest **dodatnia**. Przyspieszenie jest **ujemne**, co oznacza, że wektor przyspieszenia jest w naszym układzie odniesienia skierowany w lewo, przeciwnie do kierunku ruchu.

Siła tarcia zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona jest równa:

$$F_T = ma = -\frac{2sm}{t^2}$$

Siła tarcia jest (podobnie jak przyspieszenie) **ujemna**, co oznacza, że siła hamująca ruch wózka jest skierowana w lewo. Wartość siły tarcia jest iloczynem wartości siły nacisku na podłoże i współczynnika tarcia. Siła nacisku w naszym przypadku jest równa sile ciężkości działającej na wózek. Otrzymujemy więc:

$$f = \frac{F_T}{mg} = \frac{2sm}{t^2 mg} = \frac{2s}{t^2 g}$$

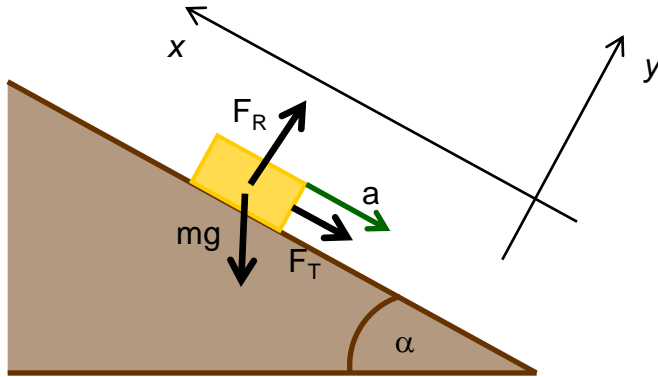
Podstawiając wartości liczbowe do otrzymanych wyrażen otrzymujemy:

$$v_0 = \frac{2 \cdot 50m}{30s} = 3.3m/s \quad F_T = \frac{2 \cdot 50m \cdot 20kg}{900s^2} = -2.2N \quad f = \frac{2 \cdot 50m}{900s^2 \cdot 9.8m/s^2} = 1.1 \cdot 10^{-2}$$

Wózek poruszał się więc początkowo z prędkością 3.3m/s, siła tarcia wynosiła 2.2N i była skierowana przeciwnie do kierunku ruchu wózka, a wartość współczynnika tarcia wynosiła  $1.1 \cdot 10^{-2}$ . (W powyższych obliczeniach zastosowano konwencję zaokrąglania wyniku do dwóch cyfr znaczących)

### Zadanie 3

Ciało poruszało się ruchem jednostajnym po płaszczyźnie, po czym zaczęło poruszać się pod górę równi. Z jakim przyspieszeniem ciało będzie poruszać się w górę równi? Współczynnik tarcia między ciałem i równią wynosi  $f$ , kąt nachylenia  $\alpha$ , przyspieszenie ziemskie  $g$ .



### Rozwiązanie

Wprowadzamy dwuwymiarowy układ odniesienia (jak na rysunku). Składowa  $y$  (prostopadła do równi) siły ciężkości  $mg \cos \alpha$  i siła reakcji pochodząca od równi równoważą się, co oznacza, że przyspieszenia wzdłuż tej osi wynosi zero:

$$F_R - mg \cos \alpha = 0 = ma \quad \text{czyli} \quad a = 0$$

Wzdłuż osi  $x$  działają: składowa siły ciężkości  $mg \sin \alpha$  oraz siła tarcia równa iloczynowi siły reakcji podłoża ( $F_R = mg \cos \alpha$ ) i współczynnika tarcia. Zapisując drugą zasadę dynamiki mamy:

$$-mg \sin \alpha - mgf \cos \alpha = ma$$

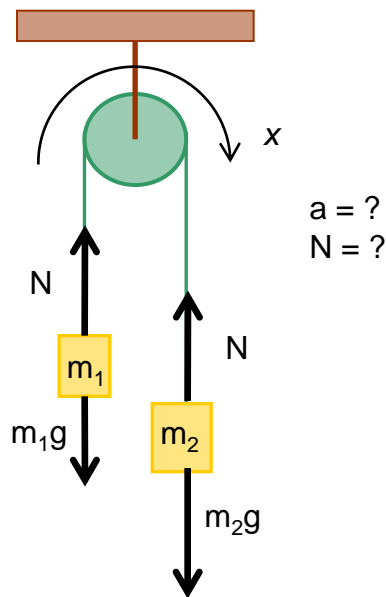
Z powyższego równania otrzymujemy wyrażenie na przyspieszenie:

$$a = -(g \sin \alpha + mgf \cos \alpha)$$

Wartość przyspieszenia jest ujemna, co oznacza, że jest ono skierowane w dół równi, przeciwnie do kierunku ruchu, mamy więc do czynienia z ruchem jednostajnie opóźnionym.

#### Zadanie 4

Dwa ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączone są nieważką, nierozciągliwą nicią przetrzuconą przez bloczek, którego masę należy zaniedbać. Bloczek obraca się w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Obliczyć przyspieszenie mas  $a$  oraz naciąg nici  $N$ .



#### Rozwiązanie

Wprowadzamy jednowymiarowy układ odniesienia, w którym ruch masy  $m_2$  w dół (i masy  $m_1$  w górę) będziemy traktowali jako ruch w kierunku dodatnim. Zapisujemy drugą zasadę dynamiki Newtona dla każdej z mas:

$$m_1 a = N - m_1 g$$

$$m_2 a = m_2 g - N$$

Rozwiązując powyższy układ równań, możemy wyznaczyć dwie niewiadome: przyspieszenie obu mas oraz siłę naciągu nici.

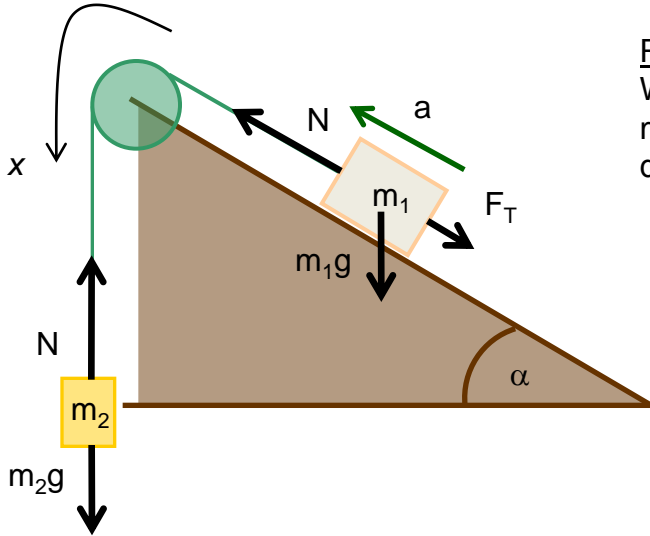
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$N = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Analizując wyrażenie na przyspieszenie, możemy zauważyć że jest ono dodatnie gdy  $m_2 > m_1$ , co oznacza, że ruch mas będzie odbywał się w kierunku dodatnim w naszym układzie odniesienia. W przypadku gdy  $m_2 < m_1$  przyspieszenie będzie ujemne, czyli ruch będzie odbywał się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi układu.

### Zadanie 5

Dwa ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączono nicią, która przerzucona jest przez bloczek znajdujący się w wierzchołku równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$ . Ciało o masie  $m_1$  porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w górę równi. Współczynnik tarcia między ciałem o masie  $m_1$  i równią wynosi  $f$ . Masę bloczka należy zaniedbać. Obliczyć przyspieszenie mas a oraz naciąg nici N.



### Rozwiązanie

Wprowadzamy jednowymiarowy układ odniesienia, w którym ruch masy  $m_2$  w dół będziemy traktowali jako ruch w kierunku dodatnim. Zapisujemy drugą zasadę dynamiki Newtona dla każdej z mas:

$$m_1 a = N - m_1 g \sin \alpha - F_T$$

$$m_2 a = m_2 g - N$$

Siła tarcia jest  $F_T$  jest równa iloczynowi siły nacisku masy  $m_1$  na równię i współczynnika tarcia. Siła nacisku jest prostopadłą do równi składową siły ciężkości:

$$F_T = f \cdot F_N = f m_1 g \cos \alpha$$

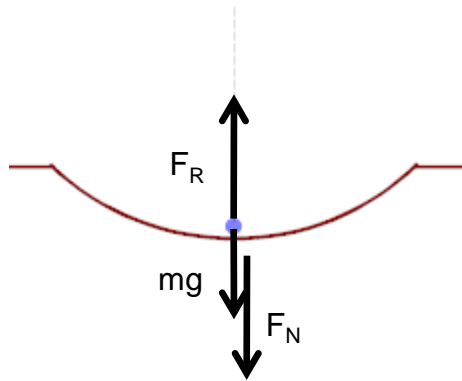
Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy:

$$a = \frac{m_2 - m_1(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g \quad N = \frac{m_1 \cdot m_2(1 + \sin \alpha + f \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Zauważmy, że przyspieszenie będzie dodatnie (ruch zgodny ze zwrotem osi układu odniesienia) gdy  $m_2 > m_1(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ . W przeciwnym przypadku ruch odbywać się będzie w kierunku przeciwnym.

### Zadanie 6

Rowerzysta o masie 50 kg przejeżdża przez wąwóz o promieniu krzywizny 20 m z prędkością 36 km/godz. Oblicz, jaką siłą rowerzysta działa na podłoże, w momencie, gdy znajduje się na środku zagłębienia. Przyjąć, w przybliżeniu,  $g=10 \text{ m/sek}^2$ .



### Rozwiązanie

Rowerzysta przejeżdżający przez wąwóz porusza się po torze kołowym. Siłą która powoduje zakrzywienie toru rowerzysty (siłą dośrodkową) jest wypadkowa sił reakcji podłoża i siły ciężkości. W szczególnym przypadku, gdy rowerzysta znajduje się na środku zagłębienia siły te leżą na jednej prostej i są przeciwnie skierowane:

$$F_d = F_R - mg$$

Siła dośrodkowa jest z definicji równa:  $F_d = \frac{mv^2}{r}$

Otrzymujemy więc:  $F_R = mg + \frac{mv^2}{r}$

Siła reakcji podłoża jest równa co do wartości wypadkowej sile z jaką rowerzysta na nie naciska, lecz skierowana przeciwnie do niej. (III zasada dynamiki Newtona).

Po wstawieniu danych liczbowych mamy:  $F_N = 750 \text{ N}$

### Zadanie 7

Z jaką maksymalną prędkością może poruszać się ciężarówka po zakręcie poziomej szosy o promieniu krzywizny  $R=200\text{m}$ ? Współczynnik tarcia kół ciężarówki o asfalt wynosi  $f=0.816$ . Przyjmij  $g=9.8\text{m/s}^2$ .

#### Rozwiązanie

Ciężarówka pokonując zakręt ze stałą prędkością, doświadcza działania dwóch sił skierowanych poziomo i działających w przeciwnych kierunkach: siły tarcia oraz siły odśrodkowej. Siła odśrodkowa jest siłą bezwładności i działa tylko w układzie odniesienia związanym z ciężarówką (która porusza się z przyspieszeniem dośrodkowym). Wartość siły tarcia wynosi:

$$F_T = fF_N = fmg$$

Siła odśrodkowa:

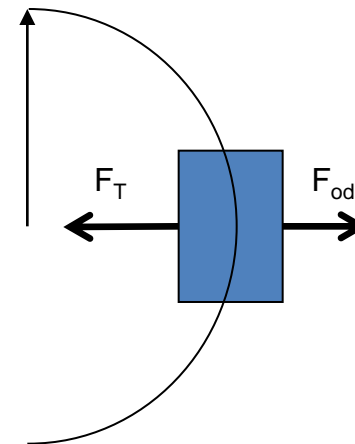
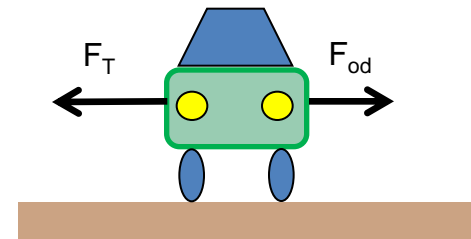
$$F_{od} = \frac{mv^2}{R}$$

Maksymalna prędkość ciężarówki odpowiada sytuacji, w której siła tarcia równa jest sile odśrodkowej. Dla większej prędkości wartość siły odśrodkowej przewyższy wartość siły tarcia i ciężarówka wypadnie z zakrętu.

$$F_{od} = F_T$$

$$\frac{mv_{max}^2}{R} = fmg$$

$$\text{czyli: } v_{max} = \sqrt{fRg}$$

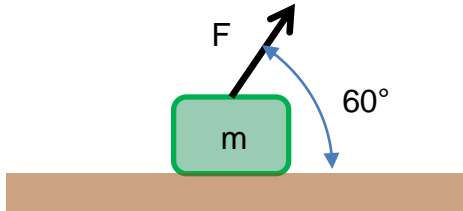


Ostateczny wynik po podstawieniu danych liczbowych:

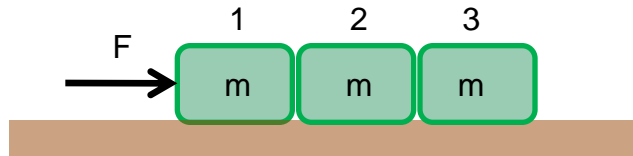
$$v_{max} = 40\text{m/s}$$

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

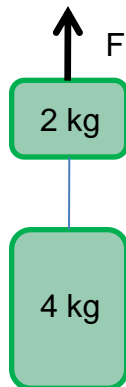
1. Klocek o masie  $m=40\text{ kg}$  leży na powierzchni bez tarcia. Do klocka zostaje przyłożona siła  $F=200\text{ N}$  (tak jak na rysunku). Oblicz wartość siły wypadkowej działającej na klocek. **(Odp.:  $F_{\text{wyp}}=100\text{ N}$ ,  $\text{kąt}=0^\circ$ )**



2. Na gładkiej powierzchni leżą trzy klocki, każdy o masie  $m=1\text{ kg}$ . Klocki są pchane przez siłę  $F=7.5\text{ N}$ . Oblicz przyspieszenie klocków oraz siłę z jaką klocek 2 działa na klocek 3. **(Odp.:  $a=2.5\text{ m/s}^2$ ,  $F=2.5\text{ N}$ )**



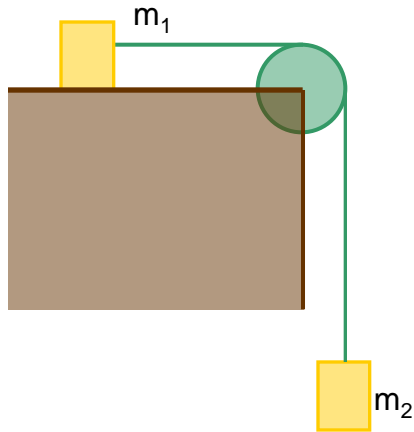
3. Dwa ciężarki są połączone nicią. Jaką siłę  $F$  należy przyłożyć do górnego ciężarka, aby oba ciężarki poruszały się z przyspieszeniem  $2\text{ m/s}^2$ . Jaka będzie wtedy siła  $N$  napinająca sznurek? **(Odp.:  $F=70.8\text{ N}$ ,  $N=47.2\text{ N}$ )**





4. Błoczek przymocowany jest do stołu (rysunek). Współczynnik tarcia między ciałem o masie  $m_1$  i stołem wynosi  $f$ . Z jakim przyspieszeniem poruszają się masy  $m_1$  i  $m_2$ ? Jaki jest naciąg nici  $N$ ?

(Odp.:  $a = g(m_1 - fm_2)/(m_1 + m_2)$ ,  $N = m_1 g(m_1 - fm_2)/(m_1 + m_2) + m_1 gf$ )



4. Jaką siłę ciągu musi posiadać pojazd kosmiczny o masie 20 ton, aby mógł on wystartować z przyspieszeniem  $3g$ ? Zakładamy, że przyspieszanie ziemskie wynosi  $10\text{m/s}^2$ . (Odp.:  $F = 8 \cdot 10^5\text{N}$ )
5. Akrobata o masie 60 kg wspina się po linie ruchem jednostajnie przyspieszonym pokonując w czasie 5 sekund odcinek 3 metrów. Ile wynosi wtedy siła napinająca linę? (Odp.:  $F = 602.4\text{N}$ )
6. Motocykl o masie 200 kg jedzie z prędkością 140 km/h. Jaka musi być siła hamowania, żeby motocykl mógł zatrzymać się na drodze 100m? Jak długo będzie trwać wyhamowanie z takiej prędkości? Zakładamy, że podczas hamowania motocykl porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym (Odp.:  $F=1513\text{N}$ ,  $t=5.14\text{s}$ )
7. Samochód hamuje z prędkości 20m/s na drodze 50m. Zakładając, że podczas hamowania samochód porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym oraz, że koła samochodu podczas hamowania są zablokowane, znaleźć współczynnik tarcia kół o jezdnię. (Odp.:  $f = 0.41$ )
8. Współczynnik tarcia pomiędzy kołami jeepa a podłożem wynosi 0.75. Jaki jest maksymalny kąt nachylenia zbocza pod które jeep będzie w stanie podjechać bez poślizgu kół? (Odp.:  $\alpha = 38.9^\circ$ )
9. Na szczycie doskonale gładkiej pochylni o wysokości 5m i kącie nachylenia  $\pi/6$  zaczyna zsuwać się paczka. Po jakim czasie paczka osiągnie podstawę pochylni? (Odp.:  $t = 2.02\text{s}$ )

11. Pod jakim kątem do poziomu powinien być nachylony dach domu, żeby woda spływała po nim w najkrótszym czasie? **(Odp.:  $\alpha = 45^\circ$ )**
12. Współczynnik tarcia pomiędzy butami sprintera a bieżnią wynosi  $\frac{3}{4}$ . Jakie maksymalne przyspieszenie podczas biegu może osiągnąć sprinter o masie 80kg, a jakie sprinterka o masie 60kg?  
**(Odp.: wynik nie zależy od masy,  $a = 7.35\text{m/s}^2$ )**
13. Równia pochyła tworzy z poziomem kąt  $\alpha$ . Jaki kierunek i jaką wartość powinno mieć przyspieszenie nadane równi, aby znajdujące się na niej ciało o masie  $m$  pozostawało w spoczynku? **(Odp.:  $a = g\text{tg}\alpha$ )**
14. Na niutonometrze wisi odważnik 1kg. Niutonometr znajduje się w windzie, która porusza się do góry z przyspieszeniem  $2.8\text{m/s}^2$ . Jakie będzie wskazanie niutonometra? Jakie byłoby wskazanie gdyby winda opadała z przyspieszeniem o takiej samej wartości? **(Odp.:  $F = 12.6\text{N}$  przy wznoszeniu,  $F = 7\text{N}$  przy opadaniu)**
15. Jaki powinien być okres obrotów ruchu jednostajnego po okręgu o promieniu 1 metra, aby wartość przyspieszenia dośrodkowego była równa wartości przyspieszenia ziemskiego? **(Odp.:  $T = 0.8\text{s}$ )**
16. Jaką prędkość powinna mieć rakietę wystrzeloną poziomo, aby obiegała ona Ziemię dookoła. Zakładamy brak oporów ruch związanych z istnieniem atmosfery oraz że Ziemia jest idealną kulą o średnicy 12700km. Jaki byłby okres obiegu takiej rakiety ? **(Odp.:  $v = 7.9\text{km/s}$ ,  $T = 1\text{h}24\text{min}26\text{s}$ )**
17. Do wiadra napełnionego wodą zostaje przywiązany sznurek długości 2m i wiadro zostaje wprowadzone w ruch po okręgu w płaszczyźnie pionowej. Przy jakiej najmniejszej częstotliwości obrotów woda z wiadra nie będzie się wylewać? **(Odp.:  $f = 0.35\text{s}^{-1}$ )**
18. Kolarz pokonuje płaski zakręt o promieniu krzywizny 15m jadąc z prędkością 10m/s. Pod jakim kątem musi nachylić rower, żeby nie upaść? **(Odp.:  $\alpha = 34.2^\circ$ )**
19. Jaką wartość powinien mieć współczynnik tarcia pomiędzy oponami samochodu wyścigowego a nawierzchnią toru, aby mógł on przejechać zakręt o promieniu krzywizny  $R=100\text{m}$  z prędkością 200km/h. Tor jest nachylony pod kątem 30 stopni do poziomu. **(Odp.:  $f = 0.91$ )**
20. Ciężarek zawieszony na sznurku o długości  $L$  wykonuje ruch jednostajny po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Sznurek tworzy kąt  $\alpha$  z pionem. Wyznacz okres obrotu ciężarka. **(Odp.:  $T = 2\pi((L/g)\text{cos}\alpha)^{1/2}$ )**

*W odpowiedziach przyjęto wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$  równą  $9.8\text{m/s}^2$*