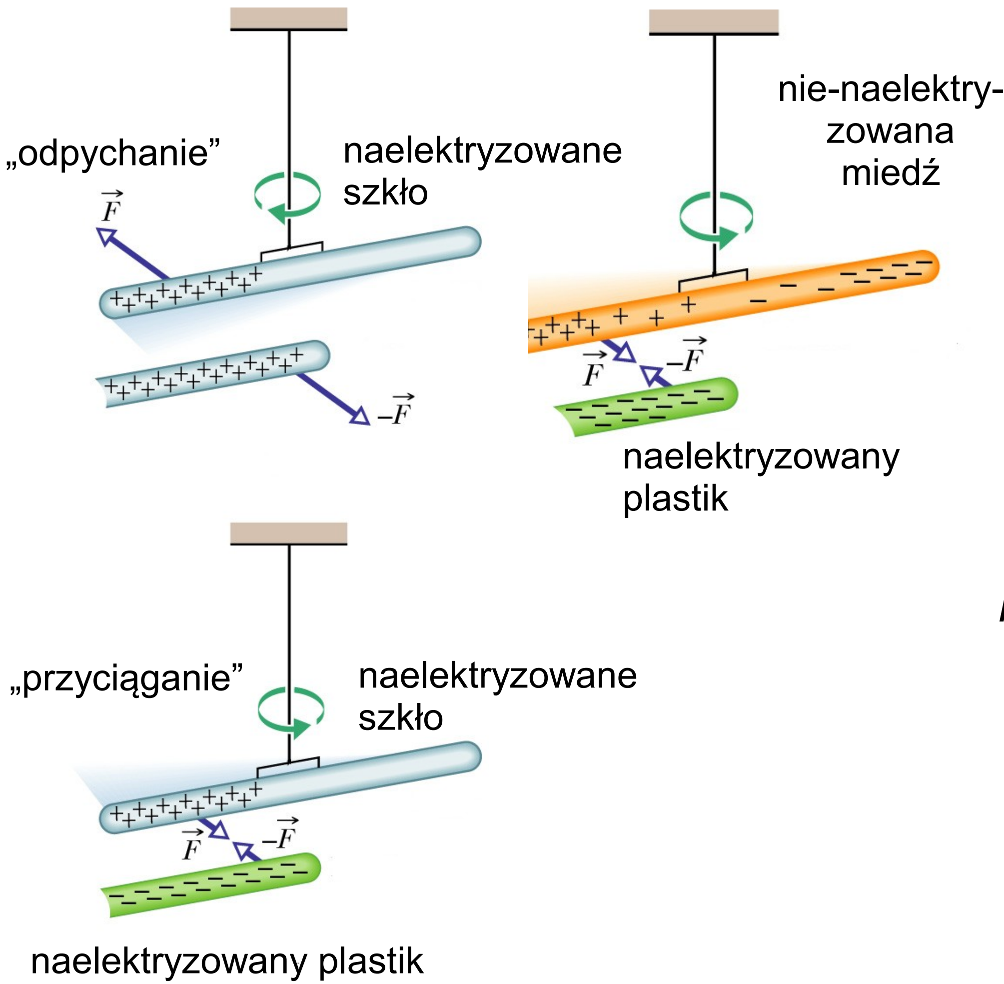
Elektrostatyka

- Prawo Coulomba
- Natężenie pola elektrycznego
- Energia potencjalna pola elektrycznego

Prawo Coulomba

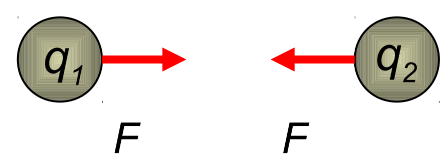


$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

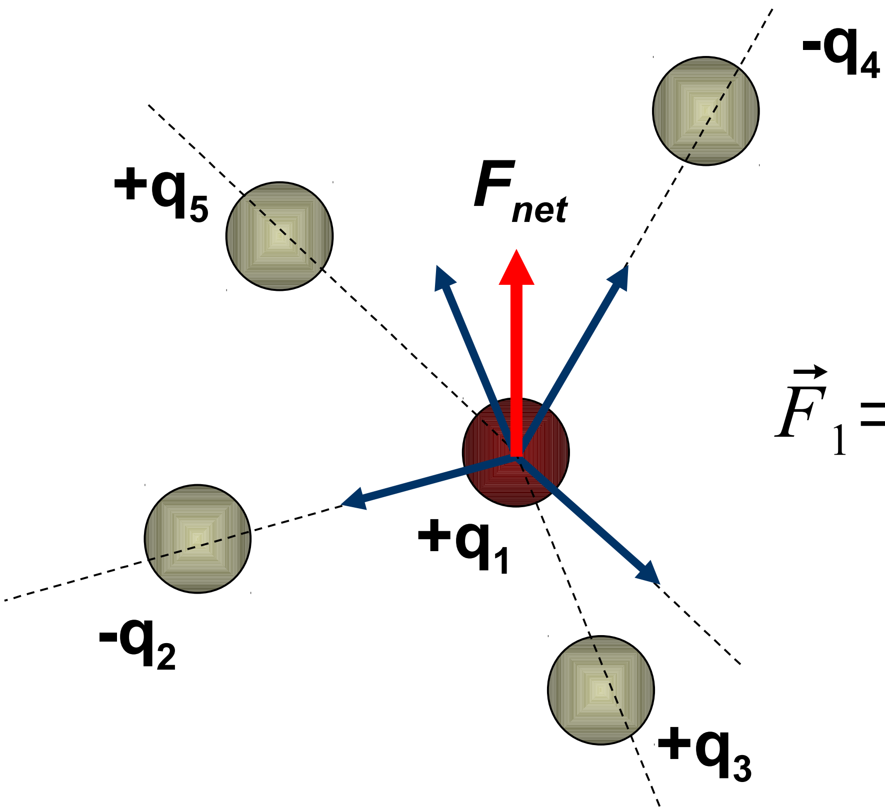
$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\, C^2/(N\, m^2)$$

(q_1,q_2 +) lub (q_1,q_2 −)

(q_1+ i q_2−) lub (q_1− i q_2+)

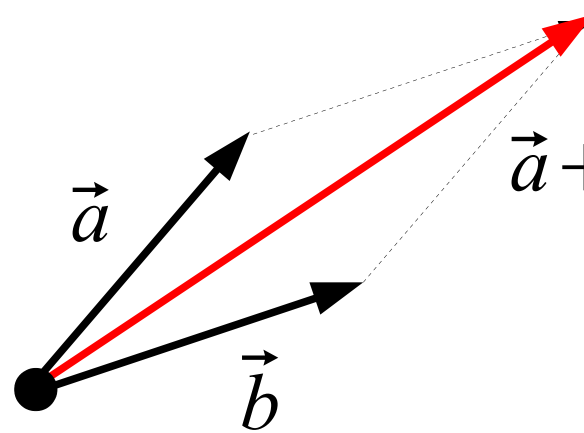


Superpozycja sił pochodzących od kilku ładunków



wektorowe sumowanie sił

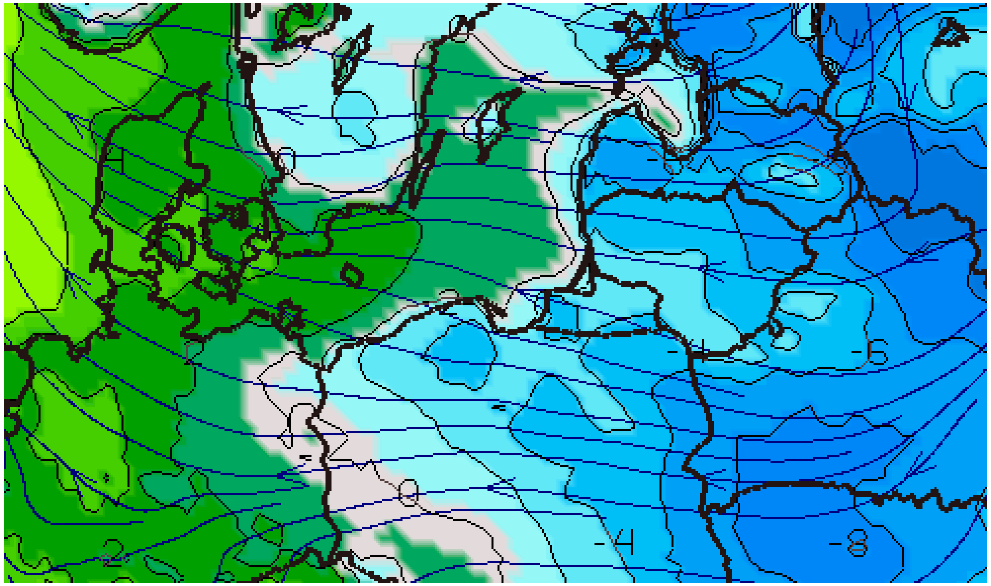
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1n} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{1i}$$



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Co to jest “pole”

- Ładunek może wywierać siłę na inny ładunek. Mówimy że wokół ładunku rozpościera się “pole elektryczne”
- Co to jest “pole” w języku fizyki ?



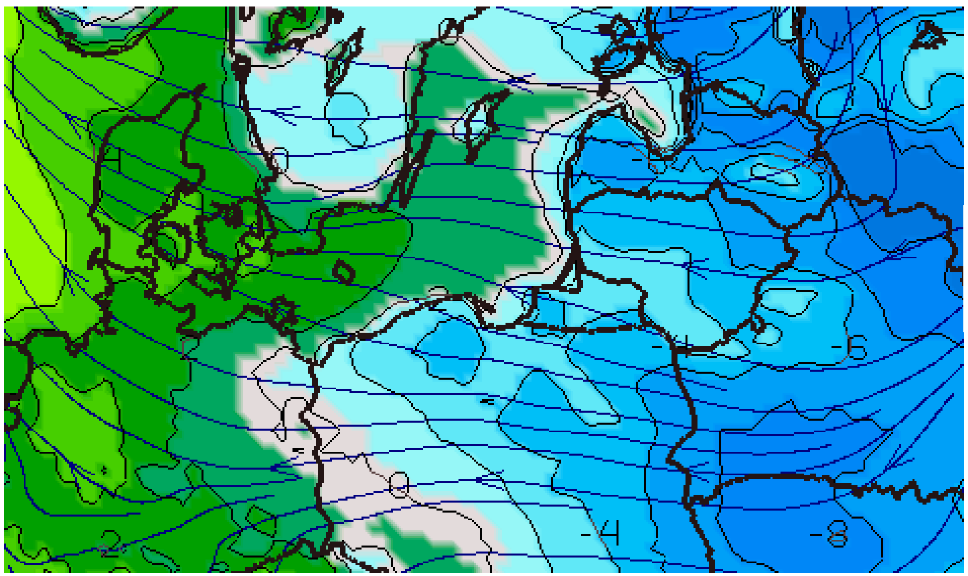
rozkład temperatury,
rozkład opadów,
rozkład wiatru

- Pole - <u>matematycznie :</u> to przestrzenny <u>rozkład</u> <u>liczb</u> (pole skalarne), lub przestrzenny <u>rozkład wektora</u>, (pole wektorowe)
- Pole - <u>fizycznie:</u> to przestrzenny rozkład wielkości fizycznej

Pole – charakterystyczne cechy

Pole może mieć swoją <u>geometrię.</u> W danym punkcie przestrzeni pole opisane jest przez pewną funkcję:

$$f = f(x, y, z)$$



Temperatura (pole skalarne)

Kierunek wiatru (pole wektorowe)

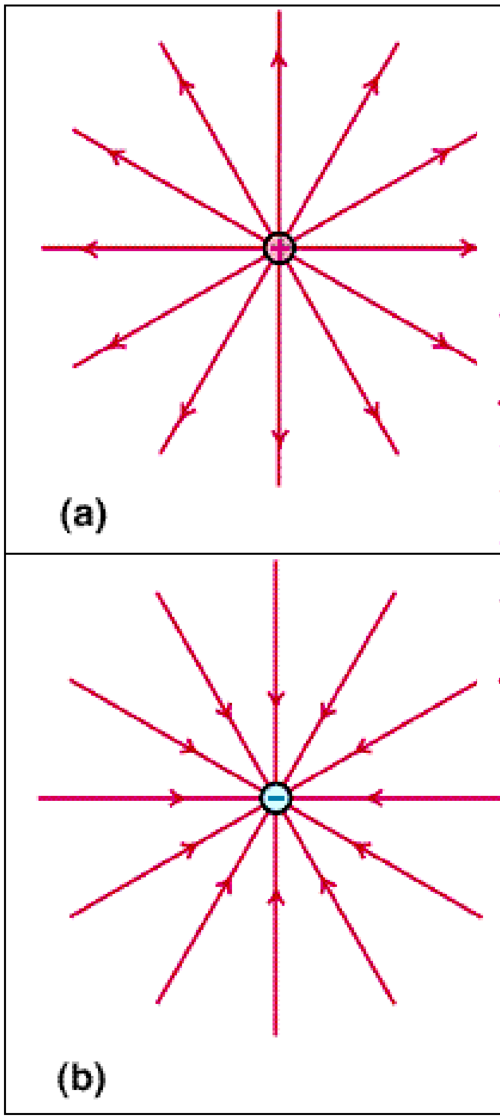
Pole może być płaskie lub przestrzenne. Stałe wartości pola są wyznaczone przez <u>izopowierzchnie</u> lub <u>izolinie.</u>

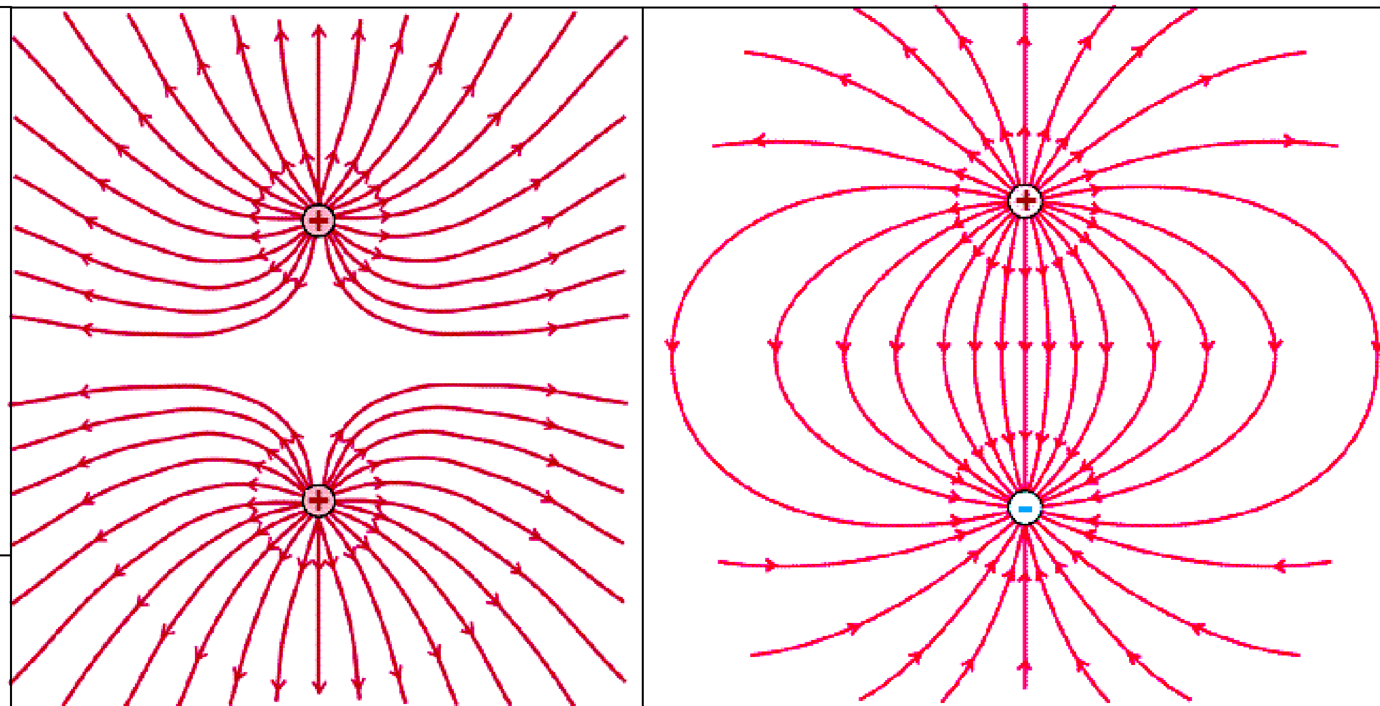
Pole wektorowe scharakteryzowane jest przez wektor pola

$$\vec{v}(\vec{r})$$

<u>Liniami pola wektorowego</u> nazywamy linie wyznaczające kierunek pola.
Wektor pola jest w każdym punkcie styczny do linii pola.

Pole elektryczne – jak wygląda?





To co charakteryzuje pole elektryczne to
<u>**wektor natężenia pola**</u>

<u>Liniami sił pola elektrycznego</u> nazywamy linie wyznaczające kierunek pola.

Wektor natężenia pola jest w każdym punkcie styczny do linii pola.

Natężenie pola elektrycznego

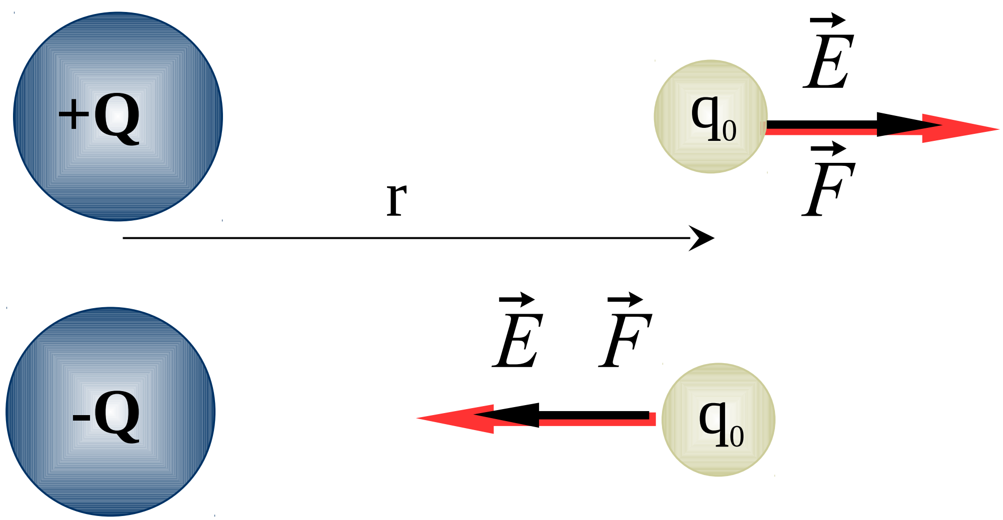
Schemat oddziaływania: **ładunek ↔ pole elektryczne ↔ ładunek**

Pole elektryczne wytwarzane przez ładunek *Q* jest polem wektorowym.

Jego wektor to **<u>natężenie pola el.</u>**

jest określony jako:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$



Wartość *E* dla ładunku punktowego *Q*

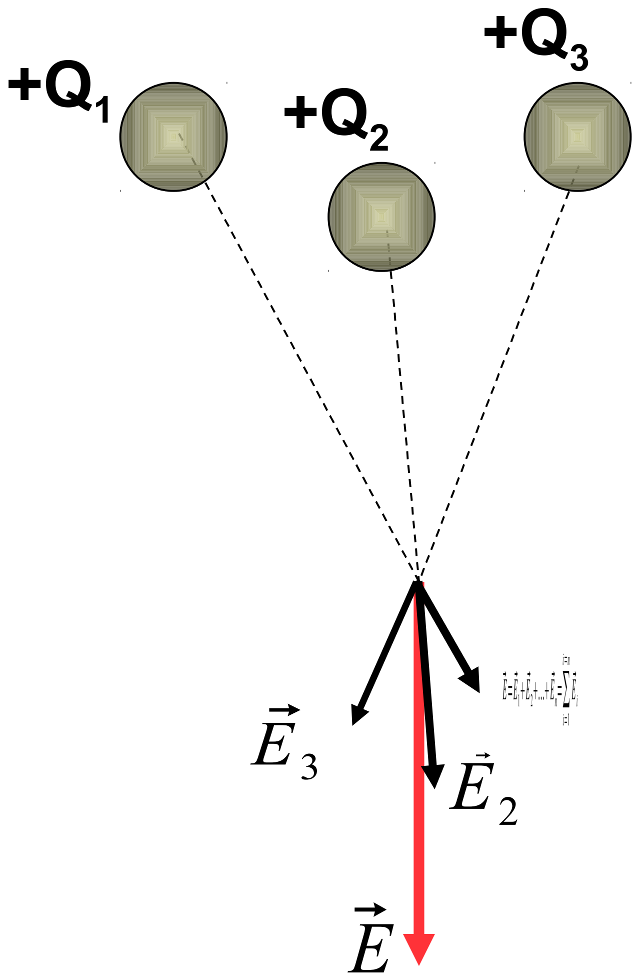
$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\vec{F} = \vec{E}\, q_0$$

gdzie q_0 jest pewnym dodatnim ładunkiem próbnym.

<u>Natężenie ***E*** zależy od ładunku, który wytwarza pole, nie od ład. próbnego!</u>

Superpozycja pól od wielu ładunków



Jeśli pole wytwarzane jest przez kilka ładunków $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ to natężenie pola w dowolnym punkcie przestrzeni jest równe sumie wektorowej natężeń pól wytworzonych przez każdy ładunek osobno w tym punkcie.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i$$

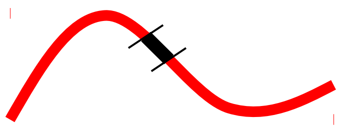
Uwaga! Tutaj sumujemy wektory!

Rozkłady ładunków

Aby wyznaczać natężenie pola elektrycznego często nie operujemy „osobnymi” ładunkami lecz raczej <u>rozkładem ładunku</u>.

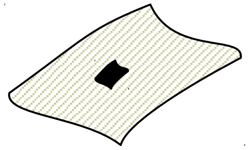
Ze względu na sposób rozłożenia ładunku wprowadzamy:

liniową gęstość ładunku $\tau = \frac{dq}{dx}$



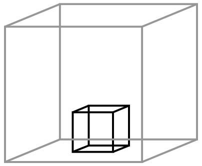
$dq = \tau\, dx$

powierzchniową gęstość ładunku $\sigma = \frac{dq}{ds}$



$dq = \sigma\, ds$

objętościową gęstość ładunku $\rho = \frac{dq}{dV}$



$dq = \rho\, dV$

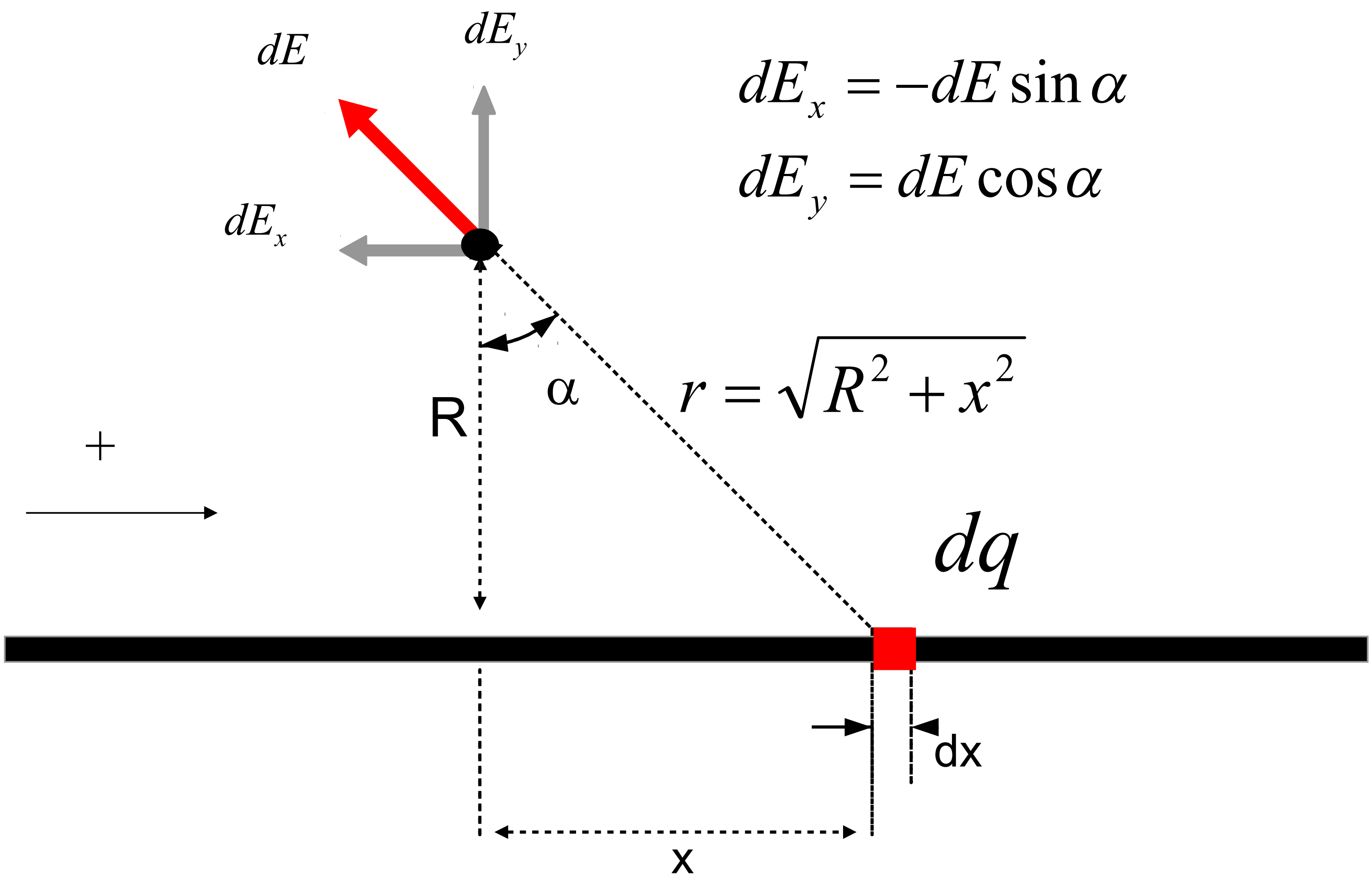
Natężenie pola pochodzące od pewnego rozkładu ładunku,

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

gdzie ***dE*** oznacza natężenie pola pochodzącego od ładunku ***dq*** *w* jednostkowej długości, powierzchni lub objętości

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

Przykład – Natężenie pola elektrycznego w odległości ***R*** od naładowanego przewodnika z prądem



$$dE_x = -dE \sin\alpha$$

$$dE_y = dE \cos\alpha$$

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

Przykład – Natężenie pola elektrycznego w odległości *R* od naładowanego przewodnika z prądem

Gęstość liniowa ładunku jest jednorodna więc

$$dq = \tau\, dx$$

Wartość natężenia pola od ***dq:***

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau\, dx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)}$$

Staramy się zamienić zmienną całkowania dx na dα

$x = R\ tg\,\alpha$ więc: $dx = \dfrac{R}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$

zatem

$$dE = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\, d\alpha$$

więc:

$$dE_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\alpha\, d\alpha$$

$$dE_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\alpha\, d\alpha = 0$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_y = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Pole elektryczne dipola

$$E = E_{(+)} - E_{(-)} =$$

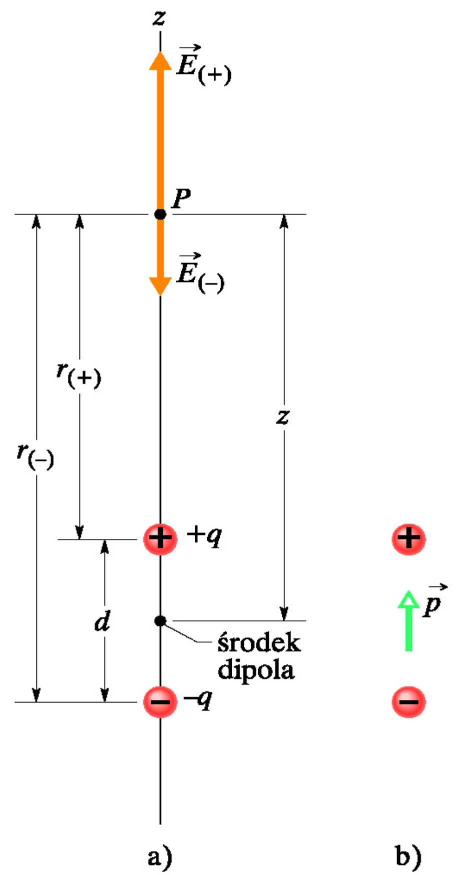
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(+)}^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_{(-)}^2} =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_{(-)}^2 - r_{(+)}^2}{r_{(+)}^2 r_{(-)}^2}\right) =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(r_{(-)} - r_{(+)})(r_{(-)} + r_{(+)})}{r_{(+)}^2 r_{(-)}^2}\right) \approx \frac{2qd}{4\pi\varepsilon_0 z^2 z}$$

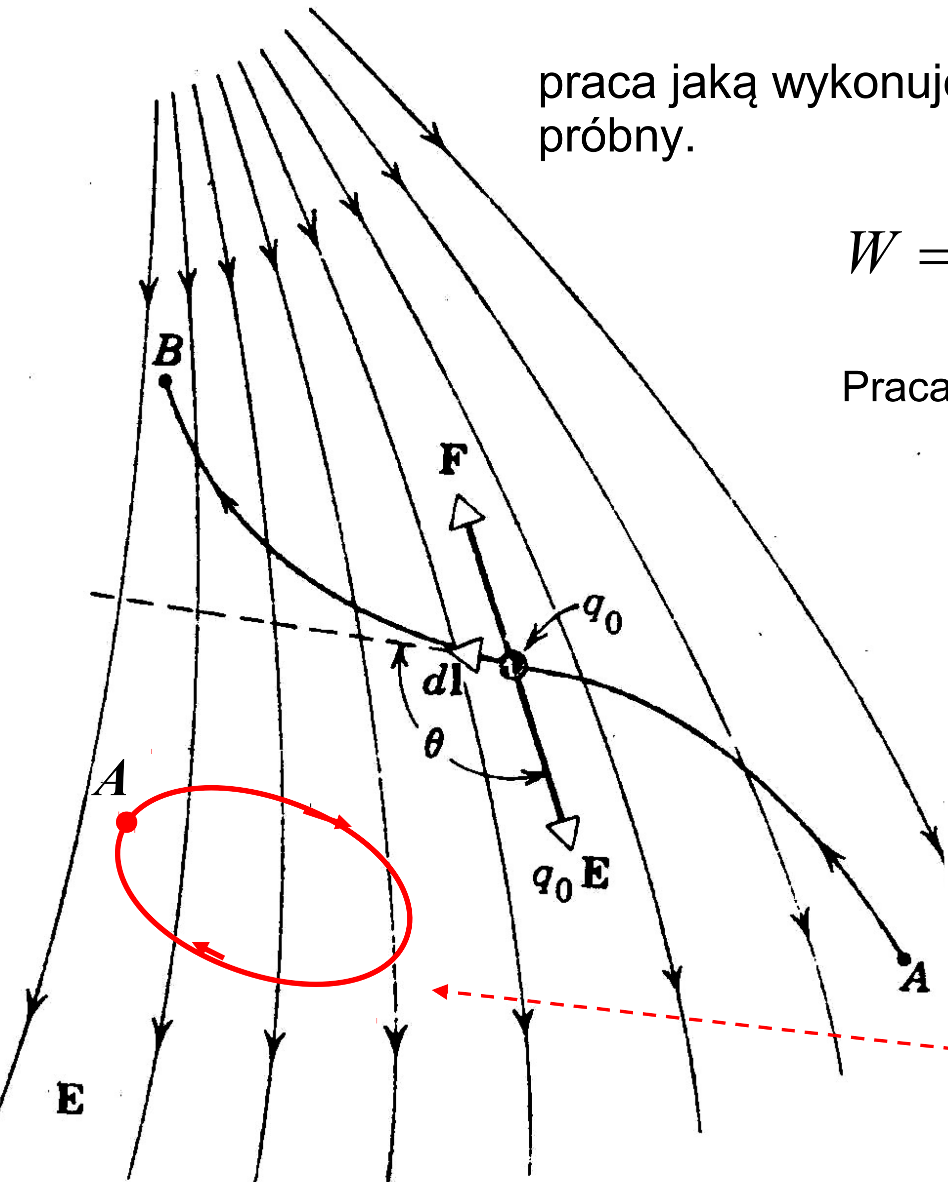
$$E = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

gdzie $\vec{p} = \vec{d}\,q$



Rys. 23.8. a) Dipol elektryczny. Wektory natężenia pola elektrycznego $\vec{E}_{(+)}$ i $\vec{E}_{(-)}$ w punkcie P na osi dipola pochodzą od dwóch ładunków dipola. Punkt P znajduje się w odległości $r_{(+)}$ i $r_{(-)}$ od poszczególnych ładunków tworzących dipol. b) Moment dipolowy $\vec{p}$ dipola jest skierowany od ładunku ujemnego do ładunku dodatniego

Praca w polu elektrycznym



praca jaką wykonuje siła zewnętrzne aby przesunąć ładunek próbny.

Siła zewnętrzna, która działa przeciwko sile Coulomba

$$W = \int_A^B \vec{F} \circ \vec{dl} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \circ \vec{dl}$$

Praca pola el. wynosi **$W_{el.}$= - W**

<u>Okazuje się, że:</u>

- *Praca wykonana przy przemieszczeniu ładunku próbnego nie zależy od toru a jedynie od początkowego i końcowego położenia*

- *Praca po torze zamkniętym = 0*

Mówimy, że
pole elektryczne jest polem zachowawczym, potencjalnym

$$W = \oint_{kontur} \vec{F} \circ \vec{dl} = -q_0 \oint_{kontur} \vec{E} \circ \vec{dl} = 0$$

Energia potencjalna pola elektrycznego

Dla pola zachowawczego (podobnie jak w przypadku pola grawitacyjnego) można wprowadzić pojęcie **energii potencjalnej**

$$U(R) = \int_R^\infty \vec{F} \circ \vec{dr} = -q \int_R^\infty \vec{E} \circ \vec{dr}$$

- jest to energia naładowanego obiektu w polu elektrycznym (precyzyjniej – energia układu : obiekt i pole elektryczne)

Praca jaką musi wykonać <u>pole</u> przy przenoszeniu ładunku z nieskończoności do danego punktu pola R

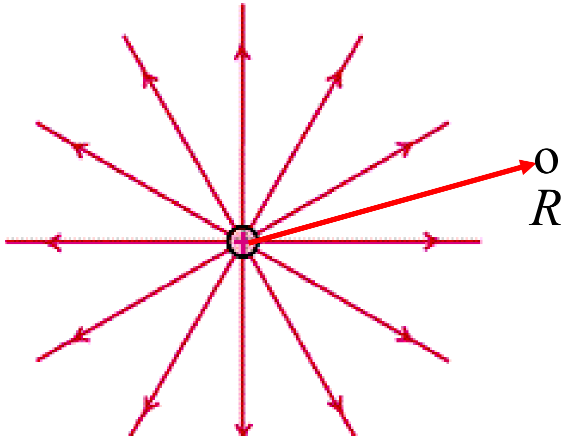
albo

Praca jaką muszą wykonać <u>siły zewnętrzne</u>, przy przenoszeniu ładunku od R do nieskończoności

Np. dla ładunku punkowego ***Q*** wytwarzającego pole el. en. pot. ładunku ***q*** wynosi:

$$U(R) = -q \int_R^\infty \vec{E} \circ \vec{dr} = -q \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

en. jest dodatnia gdy ładunki są jednoimienne
en. jest ujemna gdy ładunki są różnoimienne



Siła jako gradient energii potencjalnej

Praca siły zewnętrznej przy przemieszczaniu ładunku z R_1 do R_2 jest równa różnicy energii potencjalnej tego ładunku między R_1 i R_2

Siła zewnętrzna, która działa przeciwko sile Coulomba

$$W(R_1 \to R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F} \cdot \vec{dr} = U(R_2) - U(R_1)$$

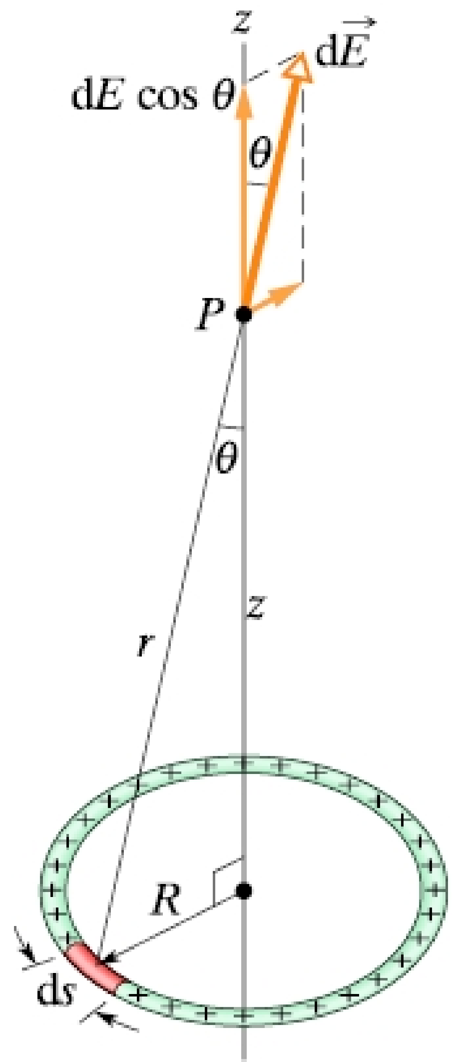
Praca sił elektrycznych (ma przeciwny znak) $\longrightarrow$ $W_{el}(R_1 \to R_2) = -[U(R_2) - U(R_1)]$

Dlatego można zapisać, że siła el. $F dr = -dU$, $\quad F = -\frac{dU}{dr}$

W ogólności trzeba zapisać $\vec{F} = -grad(U) = -\vec{\nabla} U$

czyli $\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z} \right)$

gdzie $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ oznaczają jednostkowe wektory wzdłuż osi x,y,z


z
$d\vec{E}$
$dE\cos\theta$
θ
P
θ
z
r
R
ds